



---

# Netzwerke: Herausforderungen für die Optimierung

Gerhard Reinelt

Auszug aus dem Jahresbericht  
„Marsilius-Kolleg 2010/2011“



### Optimierungsprobleme in Netzwerken

Netzwerke, wohin das Auge blickt. Schlägt man ein aktuelles Handbuch zur Netzwerkforschung auf, so findet man Anwendungsbereiche von Wirtschaft und Organisation über Politik und Soziales, Wissenschaft, Technik und Innovation, Soziale Räume und Zeiten bis hin zu Psyche und Kognition. Die Regeln, nach denen Netzwerke generiert werden, und die Fragen, die an sie gestellt werden, sind von beeindruckender Vielfalt.

Für den Optimierer sind dabei in der Regel die Konzepte „Netzwerk“ und „gerichteter oder ungerichteter Graph mit Gewichtungen der Knoten und Kanten“ Synonyme. Bedeutsam, allerdings aus Sicht der Optimierung relativ zweitrangig, ist natürlich die Berechnung von Kennzahlen oder Statistiken für Netzwerke. Spannender und herausfordernder wird es, wenn es um die Detektion spezieller Eigenschaften, die Verifikation von Vermutungen oder um die Berechnung optimaler Substrukturen geht. Auf der einen Seite lassen sich solche Fragen auf abstrakter graphentheoretischer Ebene formulieren und behandeln. Für die theoretische Forschung sind sie dann auch schon anspruchsvoll genug. Der konkrete Hintergrund und der Kontext einer Anwendung liefern eine zusätzliche Motivation und spielen allerdings darüber hinaus eine wichtige Rolle, da die Eigenschaften realer Daten für die Gestaltung von Algorithmen und die generelle Beantwortbarkeit der gestellten Fragen von entscheidender Relevanz sein können.

## *Netzwerke: Herausforderungen für die Optimierung*

Gerhard Reinelt

Zusammen mit Fred Hamprecht, Johannes Glückler und Katharina Zweig, habe ich mich im Marsilius-Kolleg mit der Identifikation interessanter Fragen zu konkreten Netzwerken und der Entwicklung von Algorithmen beschäftigt. Zwei solche Fragestellungen, die behandelt wurden und für die die Kooperation auch fortgeführt werden wird, sollen kurz skizziert werden.

### Volkswirtschaften als Netzwerke – Optimale Anordnungen

Die Lieferbeziehungen zwischen den Sektoren einer Volkswirtschaft (gemessen in Geldeinheiten) sind in der sogenannten Input-Output-Tabelle erfasst. Die europäische Statistikbehörde EUROSTAT erfasst solche Daten für die Länder der EU. Die Input-Output-Tabelle bildet eine Volkswirtschaft also als Netzwerk

der Verflechtungen ihrer Sektoren ab. Dieses Netzwerk ist relativ dicht, da zwischen fast allen Sektoren Lieferbeziehungen bestehen; allerdings sind diese unterschiedlich stark ausgeprägt.

Ein Konzept, das in den 1950er Jahren eingeführt wurde, ist die Triangulation dieser Tabellen, d. h. die Berechnung einer linearen Abfolge der Sektoren, so dass die Summe der Finanzströme, die kompatibel mit dieser Ordnung sind, so groß wie möglich ist. Die Bestimmung einer solchen Ordnung ist allerdings keineswegs trivial, sondern erfordert leistungsfähige Verfahren. Früher intensiv diskutiert, ist die Triangulation dann etwas, auch mangels schneller Optimierungsalgorithmen, in Vergessenheit geraten. Einige aktuelle Literaturstellen gibt es allerdings. Im gemeinsamen Projekt wollen wir untersuchen, ob die optimale Rangfolge etwas über die Bedeutung der Wirtschaftszweige aussagen kann. Als abstraktes Graphenproblem gehört das Triangulationsproblem (oder unter dem anderen gängigen Namen Linear Ordering Problem) zu einem meiner „Lieblingsprobleme“, mit dem ich mich schon seit geraumer Zeit beschäftige. Einerseits war also die Notwendigkeit der Weiterentwicklung von Algorithmen für mich anregend, andererseits bot sich die Gelegenheit die Ergebnisse auch konkret zu interpretieren. So konnten wir herausfinden, dass die Rentabilität von Branchen tatsächlich mit ihrer Position in der Rangfolge korreliert. Über diese und weitere Ergebnisse, wie einige Aspekte zum Vergleich der Länder der EU, wurde im Kolleg referiert (Glückler/Reinelt 2011).

Als abstraktes Konzept für den Vergleich von Objekten hat das Linear Ordering Problem viele weitere Anwendungen, so z. B. in der Archäologie oder bei der Aggregation individueller Präferenzen. Einen aktuellen Überblick bietet das Buch (Martí/Reinelt 2011). Mit ähnlichen Ansätzen sollen zukünftig auch die Verflechtungen von Industriefirmen in Deutschland untersucht werden. Die Beziehungen zwischen den Firmen sind hier durch Besitzanteile angegeben, die in der Datenbasis „Wer gehört wem?“ zur Verfügung stehen.

### Rollen in Netzwerken – Optimale Äquivalenzklassen

Ein zweites Projekt beschäftigt sich mit der Identifikation von ähnlichen Akteuren in Netzwerken und ihre Einteilung in Klassen. Hierbei ist Ähnlichkeit allerdings nicht so zu verstehen, dass Akteure vergleichbar sind, wenn sie die

gleichen Nachbarn haben (strukturelle Äquivalenz), sondern weitergehend, dass sie als gleich zu betrachten sind, wenn sie ähnliche Positionen im Netzwerk haben (reguläre Äquivalenz). Diese Klassen definieren dann quasi Rollen im Netzwerk und Akteure sind gleichrangig, wenn sie auf der Ebene der Rollen analoge Verbindungen aufweisen.

Eine optimale Bestimmung einer solchen Klassifikation von Akteuren besteht aus zwei, für sich allein schon schwierigen Teilaufgaben: der Bestimmung des Interaktionsmusters zwischen den Rollen und dann einer Zuordnung der Akteure zu den Rollen. Es gibt kommerzielle Software zur näherungsweise Lösung dieser Aufgabe. Für ein Beispiel-Netzwerk mit 70 Akteuren liefert diese Software eine Zuordnung mit 28 Fehlern, eine von uns berechnete optimale Zuordnung für das vorgeschlagene Rollenmuster hat aber nur 17 Fehler. Die Dimension 70 ist aktuell die Grenze für die Bestimmung von optimalen Lösungen bei gegebener Rolleninteraktion.

Im Rahmen unseres Projekts sollen neue Algorithmen entwickelt und eingesetzt werden, die beide Teilaufgaben simultan behandeln und auch für sehr viel größere Netzwerke effizient eingesetzt werden können. Dies ist eine längerfristige Aufgabe, die im Rahmen einer Dissertation bearbeitet werden wird.

### Komplexitätsaspekte

Viele Optimierungsprobleme sind schwierig im Sinne der Komplexitätstheorie. Was heißt das genau? Falls eine allgemein akzeptierte Hypothese („ $P \neq NP$ “), für deren Beweis (oder Widerlegung) übrigens vom Clay Mathematics Institute ein Preis von einer Million Dollar ausgesetzt ist, wahr ist, dann ist die folgende Tatsache zu akzeptieren: für jeden Algorithmus, der ein halbwegs komplexes Problem behandelt, existieren konkrete Eingabedaten, für die er versagt und das Optimum nicht findet, da die Berechnungszeit exponentiell anwächst. Die obigen beiden Probleme gehören bereits zu dieser Klasse, wobei übrigens in erster Linie nicht die Anzahl der möglichen Lösungen für die Schwierigkeit entscheidend ist. Es ist die Problemstruktur, die die Komplikationen verursacht.

Wie sieht es im Licht der theoretischen Erkenntnisse dann für Probleme unserer täglichen Realität aus, deren Spezifikation ja noch weitaus komplexer

ist, die aus vielen schwierigen Problemen kombiniert sind und über statische Aspekte hinaus auch noch dynamische haben? Wird eine 20-Millionen-Zeilen-Software immer funktionieren? Kann ein Flugzeug absolut absturzsicher sein? Können die Rettungsmaßnahmen im Falle eines größeren Industrie-Unfalls auf alle Eventualitäten vorbereitet sein? Kann es eine sichere Gen-Technik geben? Die Theorie antwortet auf alle diese Fragen ganz klar: „Nein, niemals“!

Wir können Risiken zwar nicht ausschließen, aber durch bessere Algorithmen und Software zumindest verringern. Es macht einen großen Teil der Faszination von Optimierung aus, dass man durch genaue Analyse und Verstehen der strukturellen Eigenschaften eines Problems die Chance auf seine Lösbarkeit für reale Anwendungsfälle signifikant erhöhen kann, bzw. unter Umständen sogar Klassen von Anwendungsfällen charakterisiert werden können, für die das Optimum effizient berechnet werden kann. Eine seriöse Abschätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit kann dabei allerdings nicht gegeben werden, denn wir wissen weder, ob das Denkbare auch möglich, noch ob das Mögliche auch denkbar ist.

## Fazit

Die Teilnahme am Marsilius-Kolleg war ausgesprochen stimulierend. Interdisziplinäre Zusammenarbeiten in den Naturwissenschaften oder mit der Industrie waren für mich immer schon nahe liegend und diese habe ich auch intensiv betrieben. Auf die neuen Fragestellungen in den Sozial- und Geisteswissenschaften bin ich aber erst durch den Glücksfall des Kollegs gestoßen, in dessen Atmosphäre zwanglose Diskussionen möglich waren. Insbesondere die Montagsseminare waren stets anregend. Sie gaben Einblicke in andere Forschungskulturen, halfen aber auch, die eigene zu hinterfragen und einmal aus einer anderen Perspektive zu betrachten. Neben den Forschungsmöglichkeiten, die schon in gemeinsame Projekte gemündet sind, habe ich durch die Teilnahme am Kolleg noch viele weitere potentielle Fragen entdeckt, praktische wie z. B. die Bestimmung der optimalen Zusammensetzung eines Aufsichtsrats basierend auf individuellen Präferenzen oder theoretische wie die Analyse von neuen Kürzeste-Wege-Algorithmen. Hier sind noch viele Kooperationen denkbar, die teilweise aber wohl erst in einem größeren Verbund angegangen werden können. Das bisher Konkretisierte bietet aber schon genügend Arbeit in den nächsten Jahren.

## Publikationen und Vorträge im Projektjahr

- Glückler, J./ Reinelt, G. (2011): *Die Volkswirtschaft als Leistungsnetzwerk*. Vortrag im Marsilius-Kolleg, Universität Heidelberg.
- Martí, R./ Reinelt, G. (2011): *The Linear Ordering Problem: Exact and Heuristic Methods in Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag.